Formelsammlung Mathematik – Zentrale Prüfungen 10
Anforderungsniveau MSA

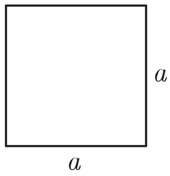
Ebene Figuren

Quadrat
Flächeninhalt:

$A = a \cdot a = a^2$

Umfang:

$u = 4 \cdot a$

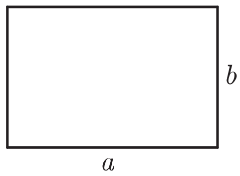


Rechteck
Flächeninhalt:

$A = a \cdot b$

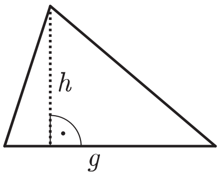
Umfang:

$u = 2 \cdot a + 2 \cdot b$



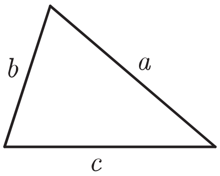
Dreieck
Flächeninhalt:

$$A = \frac{g \cdot h}{2}$$



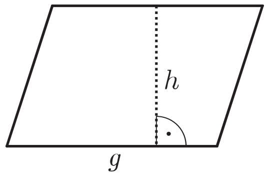
Umfang:

$u = a + b + c$



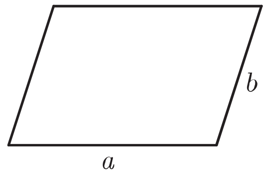
Parallelogramm
Flächeninhalt:

$A = g \cdot h$



Umfang:

$u = 2 \cdot a + 2 \cdot b$

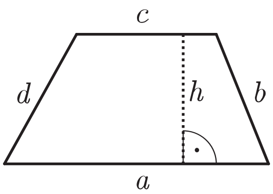


Trapez
Flächeninhalt:

$$A = \frac{a + c}{2} \cdot h$$

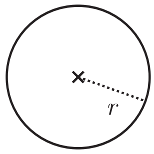
Umfang:

$u = a + b + c + d$



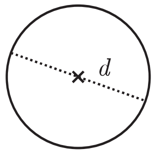
Kreis
Radius: r

Durchmesser: $d = 2 \cdot r$



Flächeninhalt: $A = \pi \cdot r^2$

Umfang: $u = 2 \cdot \pi \cdot r$

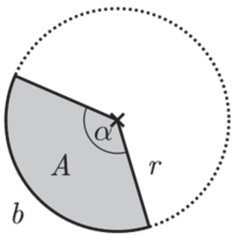


Kreissektor
Flächeninhalt:

$$A = \pi \cdot r^2 \cdot \frac{\alpha}{360°}$$

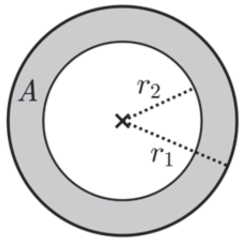
Kreisbogen:

$$b = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot \frac{\alpha}{360°}$$



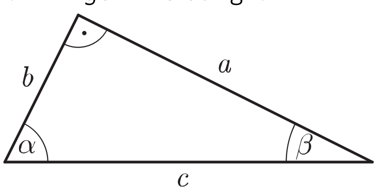
Kreisring
Flächeninhalt:

$$A = A_1 - A_2$$
$$= \pi \cdot r_1^2 - \pi \cdot r_2^2$$



Beziehungen im rechtwinkligen Dreieck

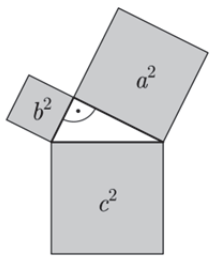
In einem *rechtwinkligen* Dreieck gilt:



Die beiden *Katheten* a und b bilden einen rechten Winkel.
Die *Hypotenuse* c ist die längste Seite des Dreiecks und liegt dem rechten Winkel gegenüber.

Satz des Pythagoras

$a^2 + b^2 = c^2$



Trigonometrie

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Hypotenuse}}$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{Ankathete von } \alpha}{\text{Hypotenuse}}$$

$$\tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Ankathete von } \alpha}$$

Maßeinheiten

Länge

Kilometer		Meter		Dezimeter		Zentimeter		Millimeter
1 km	=	1000 m						
		1 m	=	10 dm				
				1 dm	=	10 cm		
						1 cm	=	10 mm

Fläche

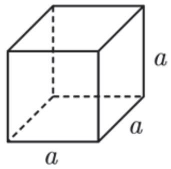
Quadratmeter		Quadratdezimeter		Quadratzentimeter		Quadratmillimeter
1 m²	=	100 dm²				
		1 dm²	=	100 cm²		
				1 cm²	=	100 mm²

Geometrische Körper

Würfel

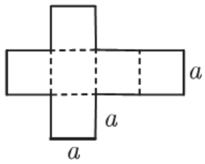
Volumen:

$V = a \cdot a \cdot a = a^3$



Oberfläche:

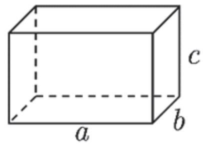
$O = 6 \cdot a \cdot a = 6 \cdot a^2$



Quader

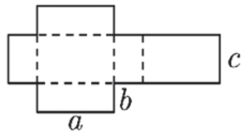
Volumen:

$V = a \cdot b \cdot c$



Oberfläche:

$O = 2 \cdot a \cdot b + 2 \cdot b \cdot c + 2 \cdot c \cdot a$



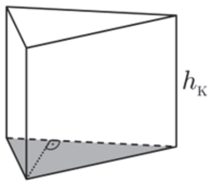
Prisma

Beispiel: Dreiecksprisma

Grundfläche: G

Höhe des Körpers: h_K

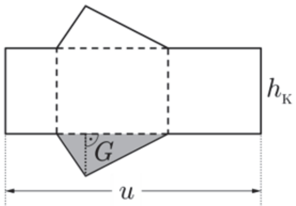
Umfang der Grundfläche: u



Volumen: $V = G \cdot h_K$

Mantelfläche: $M = u \cdot h_K$

Oberfläche: $O = 2 \cdot G + M$

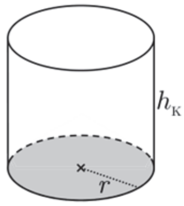


Zylinder

Grundfläche (Kreis): $G = \pi \cdot r^2$

Höhe des Körpers: h_K

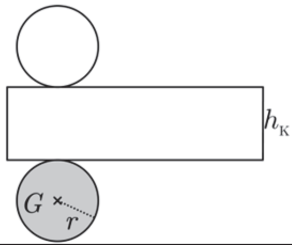
Umfang der Grundfläche: $u = 2 \cdot \pi \cdot r$



Volumen: $V = G \cdot h_K$

Mantelfläche: $M = u \cdot h_K$

Oberfläche: $O = 2 \cdot G + M$



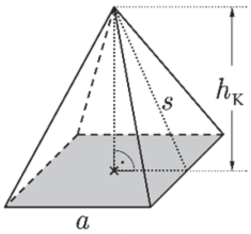
Pyramide

Beispiel: Quadratische Pyramide

Grundfläche: G

Höhe des Körpers: h_K

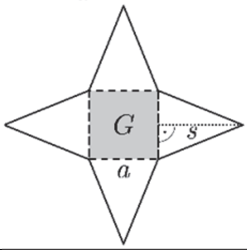
Höhe der Seitenfläche: s



Volumen: $V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h_K$

Mantelfläche: M

Oberfläche: $O = G + M$

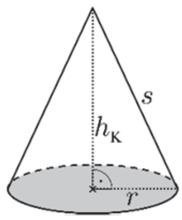


Kegel

Grundfläche (Kreis): $G = \pi \cdot r^2$

Höhe des Körpers: h_K

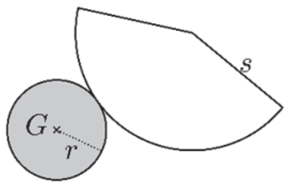
Länge der Mantellinie: s



Volumen: $V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h_K$

Mantelfläche: $M = \pi \cdot r \cdot s$

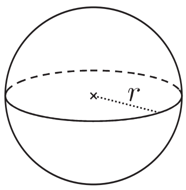
Oberfläche: $O = G + M$



Kugel

Volumen: $V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$

Oberfläche: $O = 4 \cdot \pi \cdot r^2$



Maßeinheiten

Volumen

Kubikmeter	Kubik-dezimeter	Kubik-zentimeter	Kubik-millimeter
1 m³	= 1 000 dm³		
	1 dm³	= 1 000 cm³	
		1 cm³	= 1 000 mm³

Liter (ℓ) 1 dm³ = 1 ℓ = 1 000 mℓ

1 cm³ = 1 mℓ

Masse

Tonne	Kilogramm	Gramm	Milligramm
1 t	= 1 000 kg		
	1 kg	= 1 000 g	
		1 g	= 1 000 mg

Zentrische Streckung und Ähnlichkeitsbeziehungen

Bei einer zentrischen Streckung mit dem Zentrum Z und dem Streckfaktor k $(k \neq 0)$ wird jeder Punkt P auf einen Bildpunkt P' abgebildet. Es gilt:

- Z, P und P' liegen auf einer Geraden.
- $\overline{ZP'} = |k| \cdot \overline{ZP}$
- $k > 0 : P'$ und P liegen auf derselben Seite von Z
- $k < 0 : P'$ und P liegen auf gegenüberliegenden Seiten von Z

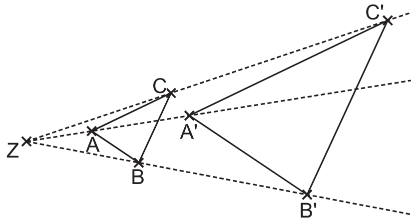
Beispiel: zentrische Streckung eines Dreiecks

$k > 0$

$$k = \frac{\overline{ZA'}}{\overline{ZA}} = \frac{\overline{ZB'}}{\overline{ZB}} = \ldots$$

außerdem gilt:

$$k = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{AC}} = \ldots$$



Original- und Bildfigur sind zueinander ähnlich, d.h. die Bildstrecken sind parallel zu den Originalstrecken und die Winkelgrößen bleiben erhalten.

Prozent- und Zinsrechnung

Prozentrechnung

Grundwert: $G \mathrel{\hat{=}} 100\,\%$

$$G = \frac{W}{p\,\%}$$

Prozentsatz: $p\,\% = \frac{p}{100}$

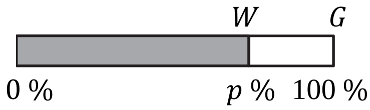
$$p\,\% = \frac{W}{G}$$

Prozentwert: W

$$W = G \cdot p\,\%$$

Anteil	*Größe*
100 %	G
1 %	$\frac{G}{100}$
p %	W

$:100$ $\quad$ $\cdot\, p$



Prozentsätze zur Orientierung

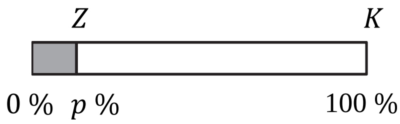
1 %	$= \frac{1}{100}$	$= 0{,}01$
5 %	$= \frac{1}{20}$	$= 0{,}05$
10 %	$= \frac{1}{10}$	$= 0{,}1$
25 %	$= \frac{1}{4}$	$= 0{,}25$
$33{,}\overline{3}$ %	$= \frac{1}{3}$	$= 0{,}\overline{3}$
50 %	$= \frac{1}{2}$	$= 0{,}5$

Zinsrechnung

Kapital: $K \mathrel{\hat{=}} 100\,\%$

Zinssatz: $p\,\%$

Zinsen: Z



Jahreszinsen

$$Z = K \cdot p\,\%$$

Monatszinsen

m: Anzahl der Monate

$$Z_m = K \cdot p\,\% \cdot \frac{m}{12}$$

Tageszinsen

t : Anzahl der Tage

$$Z_t = K \cdot p\,\% \cdot \frac{t}{360}$$

Zinseszins

Anfangskapital: K_0

Zinsfaktor: $q = 1 + \frac{p}{100}$

Anzahl der Jahre: n

Kapital mit Zinseszins Jahr für Jahr

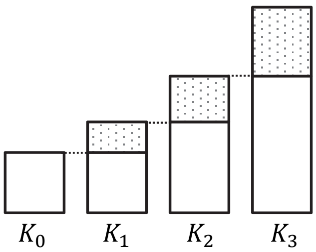
1. Jahr: $K_1 = K_0 \cdot q$

2. Jahr: $K_2 = K_1 \cdot q$

$\vdots \quad \vdots$

Kapital mit Zinseszins nach n Jahren

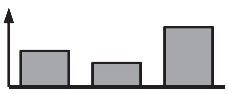
$$K_n = K_0 \cdot q^n$$



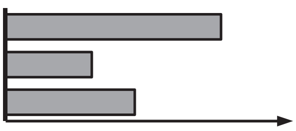
Diagramme

Werte darstellen

Säulendiagramm

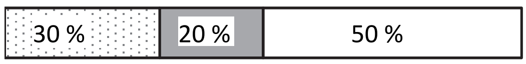


Balkendiagramm

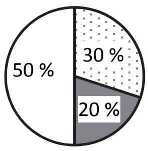


Anteile darstellen

Streifendiagramm



Kreisdiagramm



$100\,\% \mathrel{\hat{=}} 360°$

$10\,\% \mathrel{\hat{=}} 36°$

$1\,\% \mathrel{\hat{=}} 3{,}6°$

Daten

Häufigkeiten

absolute Häufigkeit

Die absolute Häufigkeit gibt an, wie oft ein bestimmter Wert (*Merkmal/Ergebnis/Ereignis*) bei einer Befragung/einem Experiment auftritt.

relative Häufigkeit

Die relative Häufigkeit gibt das *Verhältnis* von der absoluten Häufigkeit eines Wertes zu der Anzahl aller Werte an.

$$\text{relative Häufigkeit} = \frac{\text{absolute Häufigkeit}}{\text{Anzahl aller Werte}}$$

Daten sammeln und ordnen

Urliste

In einer Urliste liegen alle Werte einer Befragung in der Reihenfolge vor, wie sie beobachtet wurden.

Rangliste

In einer Rangliste liegen alle Werte einer Befragung in geordneter Reihenfolge vor, vom kleinsten zum größten Wert sortiert.

Mittelwerte

arithmetisches Mittel $\overline{x}$

Das arithmetische Mittel (*Durchschnittswert*) ist die Summe aller Werte geteilt durch die Anzahl n der Werte.

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

Median $\tilde{x}$

Der Wert, der in der Mitte einer Rangliste steht, heißt Median (*Zentralwert*).

Median bei ungerader Anzahl :

$$38\,;39\,;\underbrace{39}_{\text{Median}}\,;40;\,43$$

$$\tilde{x} = 39$$

Median bei gerader Anzahl :

$$38\,;\underbrace{39\,;40}_{\text{Median}}\,;45$$

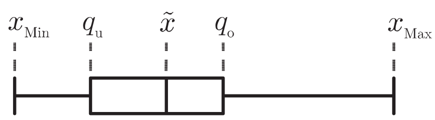
$$\tilde{x} = 39 \text{ oder } \tilde{x} = 40$$

bzw.:

$$(39 + 40) : 2 = 39{,}5$$

Statistische Kennwerte im Boxplot darstellen

Minimum:	x_{Min}	
Maximum:	x_{Max}	
Spannweite:	$x_{\text{Max}} - x_{\text{Min}}$	
Median:	$\tilde{x}$	
unteres Quartil:	q_{u}	(Median der unteren Hälfte der Werte)
oberes Quartil:	q_{o}	(Median der oberen Hälfte der Werte)



Wahrscheinlichkeitsrechnung

Laplace-Wahrscheinlichkeit

Laplace-Versuche sind Zufallsversuche, bei denen jedes Ergebnis gleich wahrscheinlich ist.

Für die Wahrscheinlichkeit P eines Ereignisses E gilt dann:

$$P(E) = \frac{\text{Anzahl der günstigen Ergebnisse}}{\text{Anzahl der möglichen Ergebnisse}}$$

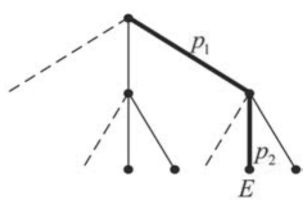
Mehrstufige Zufallsversuche

Mehrstufige Zufallsversuche lassen sich in einem Baumdiagramm darstellen. Die Wahrscheinlichkeiten lassen sich mit Hilfe der Pfadregeln berechnen.

1. Pfadregel (Produktregel)

Die Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses E ist gleich dem Produkt der Wahrscheinlichkeiten entlang des zugehörigen Pfades.

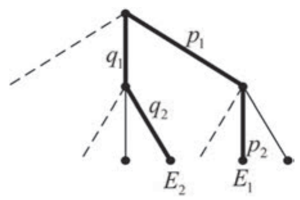
$$P(E) = p_1 \cdot p_2$$



2. Pfadregel (Summenregel)

Die Wahrscheinlichkeit eines zusammengesetzten Ereignisses E ist gleich der Summe der einzelnen Wahrscheinlichkeiten der zugehörigen Ergebnisse.

$$P(E) = P(E_1) + P(E_2) = p_1 \cdot p_2 + q_1 \cdot q_2$$



Funktionen

Eine Funktion ist eine eindeutige Zuordnung. Dabei wird jeder Ausgangsgröße genau eine Größe zugeordnet.
Eine Funktion kann auf unterschiedliche Weise angegeben werden:

Wortform

Beispiel:

„Jeder Zahl wird ihre Quadratzahl zugeordnet.“

Zuordnungsvorschrift

$x \mapsto x^2$

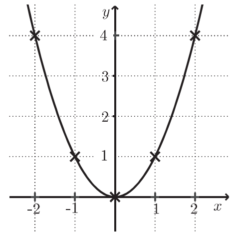
Funktionsgleichung

$y = x^2$ oder $f(x) = x^2$

Wertetabelle

x	-2	-1	0	1	2
y	4	1	0	1	4

Graph



Schnittpunkte und Berührungspunkte mit den Koordinatenachsen:

Wenn $f(x_0) = 0$, dann ist x_0 eine Nullstelle von f. Der Graph von f schneidet oder berührt die x-Achse im Punkt $(x_0 \mid 0)$.

Wenn der Graph einer Funktion f die y-Achse schneidet, dann ist an der Stelle $x = 0$ der Schnittpunkt mit den Koordinaten $(0 \mid y_0)$.

Lineare Funktionen

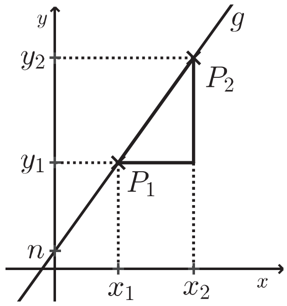
allgemeine Geradengleichung

$g\colon y = m \cdot x + n$

Steigung der Geraden

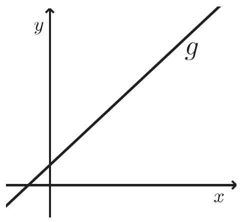
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1};\quad x_2 \neq x_1$$

y-Achsen-Abschnitt: n



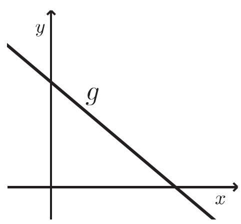
$m > 0$

die Gerade g *steigt*



$m < 0$

die Gerade g *fällt*

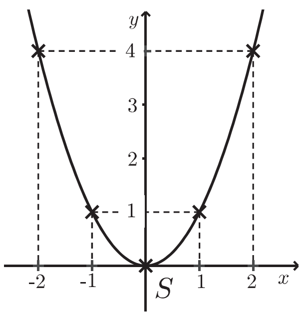


Eigenschaften von quadratischen Funktionen

Normalparabel

$y = x^2$

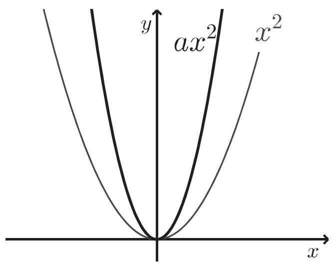
Scheitelpunkt: $S(0 \mid 0)$



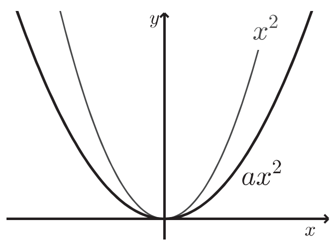
gestreckte / gestauchte Parabel: $y = a \cdot x^2$

Streckfaktor: a, $a \neq 0$

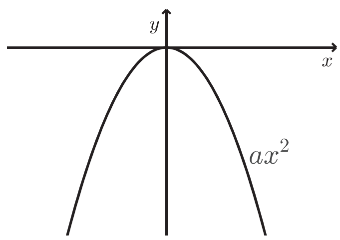
Die Parabel ist *gestreckt*, wenn $a > 1$



Die Parabel ist *gestaucht*, wenn $0 < a < 1$



Die Parabel ist *nach unten geöffnet*, wenn $a < 0$



allgemeine Form

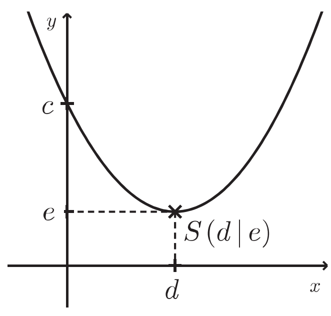
$y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$, $(a \neq 0)$

Schnittpunkt mit der y-Achse: $(0 \mid c)$

Scheitelpunktform

$y = a \cdot (x - d)^2 + e$, $(a \neq 0)$

Scheitelpunkt: $S(d \mid e)$



Exponentialfunktionen und exponentielles Wachstum

allgemeine Form

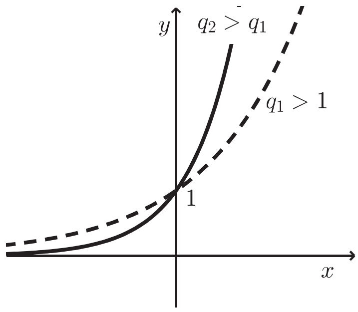
$y = q^x \qquad (q \in \mathbb{R}^+)$

Definitionsbereich: $x \in \mathbb{R}$

Wertebereich: $y \in \mathbb{R}^+$

Schnittpunkt mit der y-Achse: $(0|1)$

Kein Schnittpunkt mit der x-Achse



exponentielles Wachstum

$y = a \cdot q^x \qquad (a \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ q \in \mathbb{R}^+)$

Anfangswert (Startwert): a

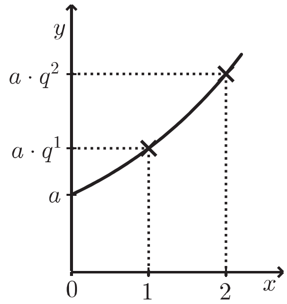
Wachstumsfaktor: q

x	0	1	2	...
y	a	$a \cdot q$	$a \cdot q^2$	...

x: $\xrightarrow{+1}$ $\xrightarrow{+1}$; y: $\xrightarrow{\cdot q}$ $\xrightarrow{\cdot q}$

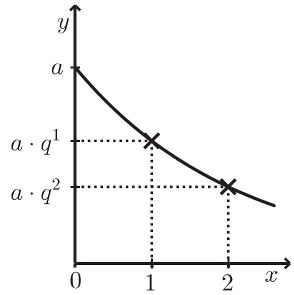
prozentuale Zunahme um $p\,\%$:

$q > 1,\ q = 1 + \frac{p}{100}$



prozentuale Abnahme um $p\,\%$:

$0 < q < 1,\ q = 1 - \frac{p}{100}$



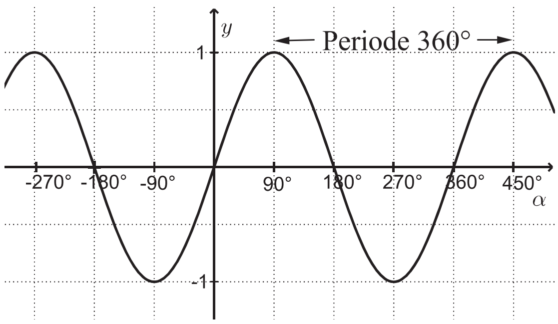
Sinusfunktion

$y = \sin\alpha$

Wertebereich: $-1 \le y \le 1$

Periode: $360°$, also

$\sin\alpha = \sin(\alpha + 360°)$



Binomische Formeln

$(a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$

$(a-b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2$

$(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2$

Quadratische Gleichungen

Normalform:

$x^2 + p \cdot x + q = 0, \quad p, q \in \mathbb{R}$

Lösung: $x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$, wenn $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \ge 0$

Es gibt keine Lösung, wenn $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q < 0$.

Potenz- und Wurzelgesetze

Potenzgesetze

$m, n \in \mathbb{Q}$, wenn $a, b \in \mathbb{R}^+$ oder $m, n \in \mathbb{Z}$, wenn $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

$a^m : a^n = a^{m-n}$

$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$

$a^n : b^n = (a : b)^n$

$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

$a^0 = 1$

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

Wurzelgesetze

$a, b \in \mathbb{R}_0^+$ und $m, n \in \mathbb{N}$ $\qquad \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$

$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$

$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \quad (b > 0)$

$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$

$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$